

گسیل تابش

$$A_r = \frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi r} \cos \theta \sin w(t - \frac{r}{C})$$

$$A_\theta = \frac{-\mu_0 I_0 L}{4\pi r} \sin \theta \sin w(t - \frac{r}{C}) \quad (5-20)$$

$$A_\phi = 0$$

بنابراین تنها مؤلفه ϕ از میدان $\vec{B}$ صفر نیست که این مؤلفه عبارت است از:

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi r} \sin \theta \left[\frac{w}{c} \cos w(t - \frac{r}{C}) + \frac{1}{r} \sin w(t - \frac{r}{C}) \right]$$

نتیجه مشتق‌گیری‌ها برای میدان الکتریکی عبارت است از:

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial t} = \frac{\gamma L I_0 \cos \theta}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{\sin w(t - \frac{r}{C})}{r^2 C} - \frac{\cos w(t - \frac{r}{C})}{w r^2} \right]$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial t} = -\frac{L I_0 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{w r^2} - \frac{w}{r C^2} \right) \cos w(t - \frac{r}{C}) - \frac{1}{r^2 C} \sin w(t - \frac{r}{C}) \right]$$

$$E_\phi = \frac{-1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial t} = 0 \quad (7-20)$$

با انتگرال‌گیری از مؤلفه عمود بردار پوئین تینگ روی سطح کره‌ای به شعاع R ، آهنگ تابش انرژی از دو قطبی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\oint \vec{S} \cdot \hat{n} da = \frac{1}{\mu_0} R^2 \int_0^\pi E_\theta B_\phi 2\pi \sin \theta d\theta \quad (8-20)$$

اگر تنها آن قسمت از آن را محاسبه کنیم که در $R \rightarrow \infty$ صفر نمی‌شود، این کار را با انتخاب جمله‌ای که در E_θ و در B_ϕ با $\frac{1}{r}$ متناسب است، انجام می‌دهیم، نتیجه به صورت زیر خواهد بود:

$$\oint \vec{S} \cdot \hat{n} da = \frac{(I_0 L)^2}{6\pi \epsilon_0 C^2} w \cos^2 w(t - \frac{r}{C}) \quad (9-20)$$

تابش از یک دوقطبی نوسان کننده

برای محاسبه تابش از یک دوقطبی الکتریکی نوسان کننده، دو قطبی الکتریکی را شامل کره‌هایی که در $Z = \pm \frac{L}{2}$ قرار گرفته‌اند و توسط سیمی با ظرفیت قابل چشم‌پوشی به یکدیگر متصل شده‌اند، در نظر می‌گیریم. بار موجود بر روی کره بالایی $+q$ و روی کره پائینی $-q$ است. اصل بقای بار ایجاب می‌کند که جریان موجود در سیم رابطه با معادله زیر داده شود:

$$I = +\dot{q} \quad (1-20)$$

که در آن I در جهت مثبت Z ، مثبت است. اگر دوقطبی در مقایسه با طول موج کوچک و نقطه مشاهده در مقایسه با L ، از دو قطبی خیل دور باشد، آنگاه $\vec{A}$ با معادله زیر داده می‌شود:

$$\vec{A}_Z(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 L}{4\pi r} I(t - \frac{r}{C}) \quad (2-20)$$

با قرار دادن پتانسیل برداری حاصل در شرط لورنتس، پتانسیل نرده‌ای به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{C^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \phi(\vec{r}, t) = \frac{L}{4\pi \epsilon_0 r^2} \left[\frac{q(t - \frac{r}{C})}{r} + \frac{I(t - \frac{r}{C})}{C} \right] \quad (3-20)$$

اکنون که پتانسیل‌های نرده‌ای و برداری به دست آمدند، برای بدست آوردن میدان الکترومغناطیسی تنها باید از آنها مشتق بگیریم. تحلیل خود را به موردی اختصاص می‌دهیم که توزیع بار - جریان نسبت به زمان به صورت هماهنگ تغییر می‌کند. به ویژه تغییرات را به صورت تابع زیر انتخاب می‌کنیم:

$$q(t - \frac{r}{C}) = q_0 \cos w(t - \frac{r}{C})$$

$$I = I_0 \sin w(t - \frac{r}{C}) = -w q_0 \sin w(t - \frac{r}{C}) \quad (4-20)$$

با تجزیه $\vec{A}$ به مؤلفه‌های کروی آن، خواهیم داشت:

این معادله توان تابش شده لحظه‌ای را به دست می‌دهد. میانگین توان تابش شده (از آنجا که میانگین $\cos^2$ برابر یک دوم است) عبارت است از:

$$\bar{P} = \frac{L^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 C^3} \frac{I_0^2}{2} \quad (10-20)$$

و با توجه به $C = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, $\lambda = \frac{2\pi C}{\omega}$ نتیجه عبارت است از:

$$\bar{P} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \frac{I_0^2}{2} \quad (11-20)$$

یک مقاومت R که حامل جریان $I_0 \cos \omega t$ باشد، انرژی را با آهنگ میانگین $\bar{P} = \frac{R I_0^2}{2}$ تلف می‌کند.

از مقایسه این رابطه با معادله (۱۱-۲۰) ملاحظه می‌شود که عاقلانه است مقاومت تابشی یک دوقطبی را با معادله زیر تعریف کنیم:

$$R_T = 789 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \Omega \quad (\text{در خلاء}) \quad (12-20)$$

برای محیط مادی ϵ_0, μ_0 را باید با ϵ, μ جایگزین کنیم و $\lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\epsilon \mu}}$

تابش از یک آنتن نیم‌موج

سیم‌ی را در امتداد محور Z از $-\frac{\lambda}{4}$ تا $+\frac{\lambda}{4}$ در نظر می‌گیریم که حامل جریان زیر است:

$$I(Z', t) = I_0 \sin \omega t \cos\left(\frac{2\pi Z'}{\lambda}\right) \quad (13-20)$$

مقدار این جریان در دو انتهای سیم برابر صفر است. نایک‌نواختی جریان ایجاد می‌کند که چگالی بار متغیر باشد. چگالی بار در دو انتهای سیم بیشترین مقدار است.

و میدانهای الکتریکی و مغناطیسی آن به صورت زیر بدست می‌آید:

$$E_\theta = \frac{I_0}{2\pi \epsilon_0 r C} \cos \omega \left(t - \frac{r}{C}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta}$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{C}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \quad (14-20)$$

بنابراین میانگین بردار پوینتینگ برای یک آنتن نیم‌موج عبارت از:

$$\bar{P} = 73 \frac{I_0^2}{2} \quad (\text{در خلاء}) \quad (15-20)$$

تابش از یک گروه بار متحرک:

در این بخش عبارتی را برای توان تابش شده توسط یک گروه بار متحرک، یا به طول معادل، توسط یک توزیع بار - جریان، به دست خواهیم آورد. پتانسیلهای الکترومغناطیسی برابرند با:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{P}(t - \frac{r}{C})}{r^3} + \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{P}}(t - \frac{r}{C})}{C r^2} \right] \quad (16-20)$$

که در آن $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ پتانسیل برداری تأخیری $\vec{A}$ در نقطه میدان با معادله زیر داده می‌شود:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{P}(t - \frac{r}{C}) \quad (17-20)$$

میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را می‌توان از روابط معمول زیر به دست آورد:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (18-20)$$

و توجه خود را به میدانهای منطقه تابش محدود می‌کنیم. به عبارت دیگر، به آن قسمت از $\vec{B}, \vec{E}$ که به صورت r^{-1} افت می‌کنند، چون تنها این قسمتها برای تعیین توان تابش شده توسط توزیع بار کفایت می‌کنند. بنابراین، میدانهای منطقه تابش با معادلات زیر داده می‌شوند:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{-\mu_0}{4\pi C r^2} \vec{r} \times \ddot{\vec{P}} \quad (19-20)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 C^2} \left[\frac{(\vec{r} \cdot \ddot{\vec{P}}) \vec{r} - r^2 \ddot{\vec{P}}}{r^3} \right] = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 C^2 r^3} \ddot{\vec{P}}$$

$$\nabla \times (\vec{r} \times \ddot{\vec{P}}) = \frac{-C}{r} \ddot{\vec{P}} \times \vec{B}$$

که در آنها مقدار $\ddot{\vec{P}}$ دز زمان تأخیری محاسبه می‌شود. واضح است که $\vec{B}, \vec{E}$ بر یکدیگر، و هر دو بر $\vec{r}$ نیز عمودند. بردار پوینتینگ $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ در جهت $\vec{r}$ است و با معادله زیر داده می‌شود:

$$\vec{S} = \frac{C}{\mu_0 r} \ddot{\vec{P}} \times (\vec{r} \times \ddot{\vec{P}}) = \frac{C}{\mu_0 r} \ddot{\vec{P}}^2 \quad (20-20)$$

یا

$$\vec{S} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 C^3 r^5} \ddot{\vec{P}} (\ddot{\vec{P}} \times \vec{r})^2 \quad (21-20)$$

اگر محور Z را در جهت $\ddot{\vec{P}}$ انتخاب کنیم، داریم:

$$\vec{S} = \frac{\ddot{P}^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 C^3 r^5} \vec{r} \quad (22-20)$$

می‌بینیم که حداکثر توان در جهت 90° نسبت به $\ddot{\vec{P}}$ تابش می‌شود. توان تابش شده کل را می‌توان با انتگرال گیری از بردار پوینتینگ روی یک سطح بسته که توزیع بار را احاطه کرده است، به دست آورد. یک انتخاب مناسب برای چنین سطحی، کره‌ای است که مرکزش در توزیع بار قرار گرفته و شعاعش آنقدر بزرگ باشد که تمام قسمتهای سطح آن در منطقه تابش قرار بگیرد. بنابراین:

$$P_R = -\frac{dw}{dt} = \oint_S \vec{S} \cdot \hat{n} da$$

$$= \frac{\ddot{P}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 C^3} \int \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \vec{r} \cdot \vec{r} \sin \theta d\theta d\phi \quad (23-20)$$

بنابراین توان تابش شده توسط یک گروه بار متحرک که در مقایسه با سرعت نور به کندی حرکت می‌کنند، برابر است با:

$$\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} (\vec{r} \times \ddot{\vec{P}})^T \vec{r}$$

$$\vec{P} = \int \vec{r} \rho(\vec{r}, t) dv, \quad dV = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr$$

$$\vec{r} = r \hat{r} = r[\hat{x} \sin\theta \cos\varphi + \hat{y} \sin\theta \sin\varphi + \hat{z} \cos\theta]$$

$$p = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r r [\hat{x} \sin\theta \cos\varphi + \hat{y} \sin\theta \sin\varphi + \hat{z} \cos\theta] \rho(\vec{r}, t) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr =$$

ρ مستقل از φ است پس انتگرال قسمت $d\varphi$:

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = +\sin\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi = -\cos\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0$$

قسمتهای مربوط به $\hat{y}$ و $\hat{x}$ صفر می‌شوند.

$$\int_0^\pi \cos\theta \sin\theta d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{2} [\sin 2\pi - \sin 0] = 0$$

جمله مربوط به قسمت $\hat{z}$ صفر است.

$$\text{چون } p = 0 \Rightarrow \dot{p} = 0 \Rightarrow \ddot{p} = 0 \Rightarrow S = 0$$

(هیچ تابشی از این توزیع بار گسیل نمی‌شود.)

۲۰-۲ (الف) چگالی توان تابش شده میانگین توسط یک دوقطبی نوسان کننده در خلأ را به صورت تابعی از زوایای θ و ϕ تعیین کنید. (ب) توان کل تابش شده توسط یک دوقطبی به طول ۲ متر را در فرکانس 500 kHz محاسبه کنید، چنانچه جریان در دوقطبی ۲ آمپر باشد (مقدار مؤثر جریان). (ج) مقاومت تابشی نوسانگر دوقطبی قسمت (ب) چقدر است؟

حل:

$$P = \oint \vec{S} \cdot \hat{n} da = \frac{1}{\mu_0} R^2 \int_0^\pi E_\theta B_\phi 2\pi \sin\theta d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{R^2}{\mu_0} E_\theta B_\phi d\Omega$$

با انتخاب روابط (۲۰-۱۲) و (۲۰-۱۳) برای E_θ و B_ϕ و انتخاب جملاتی

که با $\frac{1}{r}$ متناسب هستند، چگالی توان تابش شده، یا همان توان تابش شده در واحد زاویه فضایی:

$$P_\Omega = \frac{R^2}{\mu_0} E_\theta B_\phi$$

$$E_\theta \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{I_0 l \sin\theta}{r} \left[\frac{w}{C} \cos w(t - \frac{r}{C}) \right]$$

$$B_\phi \approx \frac{\mu_0 I_0 l}{4\pi r} \sin\theta \left[\frac{w}{C} \cos w(t - \frac{r}{C}) \right]$$

$$P_\Omega = \frac{R^2}{\mu_0} \left[\frac{\mu_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{I_0 l \sin^2\theta}{r^2} \frac{w^2}{C^2} \cos^2(t - \frac{r}{C}) \right]$$

$$\frac{\int_0^T \cos^2(t - \frac{r}{C}) dt}{T} = \frac{\frac{T}{2}}{T} = \frac{1}{2}$$

$$\bar{P}_\Omega = \frac{R^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{I_0 l}{r} \right)^2 \frac{\sin^2\theta}{C^2} w^2 \frac{1}{2}$$

$$P_R = -\frac{dw}{dt} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{r} \frac{\bar{P}^2}{C^2} \quad (24-20)$$

معادله بالا عبارتی است برای توان تابش شده توسط بارهایی که به دلخواه حرکت می‌کنند برحسب گشتاور دو قطبی الکتریکی $\vec{P}$ بارهای مذکور.

می‌توان معادلات (۲۰-۱۹)، (۲۰-۲۴) را در مورد تابش از یک بار منفرد شتابدار q نیز به کار برد.

گشتاور دو قطبی این بار $q\vec{r}'$ است، که در آن $\vec{r}'$ از یک مبدا دلخواه اندازه‌گیری می‌شود. بنابراین:

$$\vec{P} = q\vec{r}' = q\vec{V} \quad (25-20)$$

که در آن $\vec{V}$ سرعت بار است که به انتخاب مبدا بستگی ندارد. سرانجام

$$\vec{P} = q\vec{V} \quad (26-20)$$

که در آن $\vec{V}$ شتاب بار است. با قرار دادن نتیجه اخیر در معادله (۲۴-۲۰) خواهیم داشت:

$$P_R = -\frac{dw}{dt} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{r} \frac{\dot{V}^2}{C^2} \quad (27-20)$$

که معادله‌ای است برای توان تابش شده توسط بار شتابداری که به کندی حرکت می‌کند.

میرایی تابشی: سطح مقطع تامسون

برای الکترونی در محیطی مادی که موجی در آن در حال انتشار است، منبع توان میدان E ی موج است و اتلاف با فرکانس میرایی بیان می‌شود.

$$\gamma = \frac{4\pi R_e}{r} w \quad (28-20)$$

و به سطح مقطع مؤثر تامسون برای الکترون آزاد

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} R_e^2 \quad (29-20)$$

منجر می‌شود، که در این روابط R_e «شعاع کلاسیک الکترون» است:

$$R_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mC^2} = 2.81 \times 10^{-15} \text{ (m)} \quad (30-20)$$

مسائل فصل بیستم

۲۰-۱ فرض کنید یک توزیع بار با تقارن کروی تنها در جهت شعاعی نوسان می‌کند، به طوری که در هر لحظه از زمان تقارن کروی خود را حفظ می‌کند. ثابت کنید که تابشی گسیل نمی‌شود.

حل:

(یک توزیع بار با تقارن کروی) $\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(r) + \rho_1(r) \cos wt$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = [r^2 + a^2 - 2ra \cos \gamma]^{1/2} = [r^2 + a^2 - 2ra \cos \gamma]^{1/2}$$

زاویه بین r' و r است.

شعاع: $|r'| = a$

زاویه بین r بردار در دستگاه کروی:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi' - \varphi) \\ \vec{a} &= \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \text{ (and) } \vec{b} \\ &= \sin \theta' \cos \varphi' \hat{i} + \sin \theta' \sin \varphi' \hat{j} + \cos \theta' \hat{k} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \cos \gamma = \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi \cos \varphi' \\ &\quad + \sin \theta \sin \theta' \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \theta \cos \theta' \\ &= \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' [\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi'] \\ &= \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi' - \varphi) \end{aligned}$$

در اینجا چون تقارن استوانه‌ای داریم پس می‌توان فرض کرد که بردار $\vec{r}$ در صفحه $(x-z)$ قرار دارد و $(\varphi = 0)$ قرار دهیم:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi' \\ \text{چون } r' \text{ در صفحه } (x-y) \text{ قرار دارد } \theta' &= \frac{\pi}{2} \text{ است پس زاویه بین } r, r' \\ \cos \gamma &= \sin \theta \cos \varphi' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{r}-\vec{r}'| &= r \left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a \sin \theta \cos \varphi'}{r} \right]^{1/2} \\ (r \gg a) \quad r \left[1 - \frac{a \sin \theta \cos \varphi'}{r} \right] &= r - a \sin \theta \cos \varphi' \\ A(r, t) &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos w(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}) a d\varphi' \hat{\varphi}'_0}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ \hat{\varphi}'_0 &= -\sin \varphi' \hat{X} + \cos \varphi' \hat{Y} \\ \cos w(t - \frac{r}{C} + \frac{a \sin \theta \cos \varphi'}{C}) &\stackrel{\text{بسط تیلور}}{=} \cos w(t - \frac{r}{C}) \\ &\quad + \frac{a \sin \theta \cos \varphi'}{C} (-w \sin w(t - \frac{r}{C})) + \dots \\ |\vec{r}-\vec{r}'|^{-1} &= (r - a \sin \theta \cos \varphi')^{-1} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{a \sin \theta \cos \varphi'}{r} \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{a \sin \theta \cos \varphi'}{r} \right] = \frac{1}{r} + \frac{a \sin \theta \cos \varphi'}{r^2} \end{aligned}$$

فتوا جملات $\frac{1}{r}$ را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} A_\varphi &= \frac{\mu_0 I_0 a}{4\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \cos w(t - \frac{r}{C}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{aw}{C} \sin \theta \cos \varphi' \sin w(t - \frac{r}{C}) \right\} (\sin \varphi') d\varphi' \hat{X} \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left\{ \cos w(t - \frac{r}{C}) - \frac{aw}{C} \sin \theta \cos \varphi' \sin w(t - \frac{r}{C}) \right\} \\ &\quad \cos \varphi' d\varphi' \hat{Y} \end{aligned}$$

چون:

$$\int_0^{2\pi} \sin \varphi' d\varphi' = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos \varphi' \sin \varphi' d\varphi' = 0,$$

(ب)

$$\begin{aligned} L &= 2(m), \quad w = 500 \text{ kHz}, \quad I_{eH} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow I_0 = \sqrt{2} A \\ \bar{P} &= \frac{I^2 w^2}{6\pi \epsilon_0 c^2} \frac{I_0^2}{2} = \frac{r^2 \times (2\pi \times 500 \times 10^3)^2}{6\pi \times (8.85 \times 10^{-12}) \times (3 \times 10^8)^2} \frac{1}{2} (2\sqrt{2})^2 \\ &= 0.78 \left(\frac{J}{\rho} \right) \end{aligned}$$

(ج)

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{L^2 w^2}{6\pi \epsilon_0 C^2} \frac{I_0^2}{2}, \quad w = \frac{2\pi c}{\lambda} \\ \bar{P} &= \frac{2\pi}{3} \frac{L^2}{C \epsilon_0 \lambda^2} \frac{I_0^2}{2} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2 \frac{I_0^2}{2} \\ \Rightarrow R_r &= \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2 \end{aligned}$$

$$R_r = 789 \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2 (\Omega) \quad (\text{در خلا}) \quad (1)$$

$$\lambda v = C \Rightarrow \lambda = \frac{C}{v} = \frac{C}{500 \times 10^3} = 600 \text{ (m)} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow R_r = 789 \left(\frac{3}{600} \right)^2 = 1/97 \times 10^{-2} (\Omega)$$

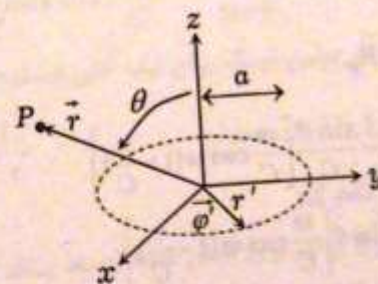
۲۰-۳- یک حلقه سیم دایره‌ای حامل جریان $I = I_0 \cos \omega t$ یک دوقطبی مغناطیسی نوسان کننده را تشکیل می‌دهد. میدانهای تابش E و B را برای این نوسانگر تعیین کنید و توان کل تابشی آن را محاسبه کنید. [راهنمایی: از معادله (۸-۶۶) شروع کنید و آن را بر حسب پتانسیل تأخیری:

$$A(r, t) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \oint \frac{\cos w(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\vec{r}'$$

بیان کنید. با توجه به تقارن A تنها مؤلفه φ دارد:

$$A_\varphi(r, t) = \frac{\mu_0 I_0 a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos w(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \cos \varphi' d\varphi'$$

که در اینجا $|\vec{r}-\vec{r}'| = (r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos \varphi')^{1/2}$ و a شعاع حلقه است. [تقریب دوقطبی مستلزم آن است که $a \ll r$ و $\omega a \ll c$].



$$\begin{aligned} I &= I_0 \cos \omega t \quad E, B = ? \\ A(r, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J(r', t') dv'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I(r', t') dl'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ (t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}) \quad dl' &= a d\varphi' \\ \hat{\varphi}' &= -\sin \varphi' \hat{X} + \cos \varphi' \hat{Y} \end{aligned}$$

۲۰- ۵- (الف) بیشینه جریان ورودی آنتن نیم موجی را که $1kW$ تابش می کند، محاسبه کنید. (ب) میدان E ی مربوط به چگالی توان میانگین در فاصله $10km$ از این آنتن چقدر است؟ اثرات زمین را نادیده بگیرید.

حل: (الف) توان تابشی میانگین برای یک آنتن نیم موج در خلا برابر است با:

$$\bar{P} = \frac{I_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{I_0^2}{2\pi} \cdot 2\pi = I_0^2 \quad \bar{P} = 10^3 W \Rightarrow I_0^2 = 10^3 \Rightarrow I_0 = 31.6 A$$

(ب)

$$P = \oint \vec{S} \cdot \hat{n} da = \int R^2 \vec{S} \cdot \hat{n} d\Omega$$

بنابراین چگالی توان (توان در واحد زاویه فضایی) برابر است با:

$$P_{\Omega} = R^2 \vec{S} \cdot \hat{n} = \frac{R^2}{\mu_0} E_{\theta} B_{\phi} \quad (1)$$

$$\vec{E} = -\frac{c}{r} \vec{r} \times \vec{B} \Rightarrow E_{\theta} = c B_{\phi} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow P_{\Omega} = \frac{R^2}{\mu_0} \frac{E_{\theta}^2}{c} \quad (3)$$

از طرفی می توان نوشت:

$$P_{\Omega} = \frac{r^2 \bar{P}}{4\pi} = \frac{r^2}{4\pi} \left(\frac{\bar{P}}{r^2} \right) \quad (4)$$

(ب) چگالی توان میانگین است که همراه با ضریب $(\frac{\bar{P}}{4\pi})$ چگالی توان را بدست می دهد:

$$(3), (4) \Rightarrow \frac{\bar{P}}{4\pi} = \frac{R^2 E_{\theta}^2}{\mu_0 c} \Rightarrow E_{\theta} = \left[\frac{\mu_0 c \bar{P}}{4\pi R^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$E_{\theta} = \left[\frac{(4\pi \times 10^{-7}) \times (3 \times 10^8) \times (10^3)}{4\pi \times (10 \times 10^3)^2} \right]^{\frac{1}{2}} = 2.77 \times 10^{-2} \left(\frac{V}{m} \right)$$

۲۰- ۶- تحقیق کنید که A و ϕ در معادلات (۲۰-۲۵) و (۲۰-۲۳) در شرط لورنتس صدق می کنند.

حل:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

$$\phi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{r} + \frac{r \cdot \dot{p}(t-\frac{r}{c})}{r^2} + \frac{r \cdot \ddot{p}(t-\frac{r}{c})}{2cr^2} \right\}$$

$$\vec{A}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \frac{\dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \frac{1}{r} \cdot \dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c}) + \frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \cdot \dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c}) + \frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(r) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (F_x(r) \hat{i} + F_y(r) \hat{j} + F_z(r) \hat{k}) = \frac{\partial F_x(r)}{\partial x} + \frac{\partial F_y(r)}{\partial y} + \frac{\partial F_z(r)}{\partial z} = \frac{\partial F_x(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = 0$$

$$A_{\phi} = \frac{\mu_0 I_0 a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-aw}{rC} \sin \theta \sin w(t-\frac{r}{C}) \cos^2 \phi' d\phi' = \frac{-\mu_0 I_0 a}{4\pi r} \left(\frac{aw}{C} \right) \sin \theta \sin w(t-\frac{r}{C}) \times \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi' d\phi'$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\phi'}{2} d\phi' = \frac{1}{2} \left[\phi' + \frac{\sin 2\phi'}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$A_{\phi} = \frac{-\mu_0 I_0 a}{4\pi r} \frac{aw}{C} \sin \theta \sin w(t-\frac{r}{C}) = \frac{-\mu_0 I_0 w A}{4\pi C r} \sin \theta \sin w(t-\frac{r}{C})$$

($A = \pi a^2$ ، مساحت حلقه است.)

بنابراین برای میدان های $\vec{E}$ ، $\vec{B}$ خواهیم داشت:

$$B_{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_{\phi})}{\partial r} \Rightarrow B_{\theta} = \frac{-\mu_0 I_0 Aw}{4\pi C^2 r} \sin \theta \cos w(t-\frac{r}{C})$$

$$\vec{E} = -\frac{C}{r} \vec{r} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow E_{\phi} = -CB_{\theta} = \frac{I_0 Aw}{4\pi \epsilon_0 C^2 r} \sin \theta \cos w(t-\frac{r}{C}) \left(C^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \right)$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

$$P = \oint \vec{S} \cdot \hat{n} da = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{E_{\phi} B_{\theta}}{\mu_0} r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{\mu_0 I_0^2 A^2 w^2}{16\pi C^2} \cos^2 w(t-\frac{r}{C})$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2}$$

۲۰- ۴- کاریی نسبی یک دوقطبی الکتریکی به طول ۲ متر را در مقایسه با یک دوقطبی مغناطیسی به همان قطر، به عنوان منابع تابش الکترومغناطیسی، در فرکانس $1MHz$ تعیین کنید.

حل: توان تابشی میانگین یک دوقطبی الکتریکی،

$$\bar{P}_E = \frac{L^2 w^2}{16\pi \epsilon_0 C^2} \frac{I_0^2}{2}$$

توان تابشی میانگین از یک دوقطبی مغناطیسی نوسان کننده:

$$\bar{P}_m = \frac{\mu_0 A^2 w^2}{16\pi C^2} \frac{I_0^2}{2}$$

$$\frac{\bar{P}_E}{\bar{P}_m} = \frac{\frac{L^2 w^2}{16\pi \epsilon_0 C^2} \frac{I_0^2}{2}}{\frac{\mu_0 A^2 w^2}{16\pi C^2} \frac{I_0^2}{2}} = \frac{L^2 w^2}{\epsilon_0 \mu_0 A^2 w^2} = \frac{L^2}{A^2}$$

$$= v = 1MHz = 1 \times 10^6 Hz \Rightarrow w = 2\pi \times 10^6 \left(\frac{1}{s} \right), L = 2m$$

$$A = \pi a^2 = \pi$$

$$d = \frac{l^2 I_0^2 \omega^2}{4\pi \epsilon_0 C^2 r^2} = \frac{r}{2}$$

۲۰-۸- فرض کنید دوقطبی الکتریکی P با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محوری عمود بر گشتاور دوقطبی دوران می‌کند. میدان تابش و بردار پوینینگ را پیدا کنید. راهنمایی: دوقطبی دوران کننده را به صورت برهم‌نیش دو دوقطبی در نظر بگیرید که بر یکدیگر عمودند و به طور سینوسی تغییر می‌کنند.

حل: فرض می‌کنیم که بردار گشتاور دوقطبی الکتریکی، $\vec{p}$ ، در صفحه $(x-y)$ واقع است و با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور Z دوران می‌کند، بنابراین:

$$\begin{aligned}\vec{p}(t) &= p_0 \cos \omega t \hat{X} + p_0 \sin \omega t \hat{Y} \\ \dot{\vec{p}}(t) &= -p_0 \omega \sin \omega t \hat{X} + p_0 \omega \cos \omega t \hat{Y} \\ \ddot{\vec{p}}(t) &= -p_0 \omega^2 \cos \omega t \hat{X} - p_0 \omega^2 \sin \omega t \hat{Y}\end{aligned}$$

$$A(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J(r', t - \frac{R}{C}) dv'}{|r - r'|}$$

$$|r - r'| = (r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}')^{1/2} = r \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)^{1/2}$$

$$|r - r'| = r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}$$

$$|r - r'|^{-1} = \left[r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} \right]^{-1} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right]^{-1} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3}$$

$$J(r', t - \frac{r}{C} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{rC}) = J(r', t - \frac{r}{C}) + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{rC} \frac{\partial J}{\partial t} \Big|_{t=t-\frac{r}{C}}$$

$$A(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int J(r', t - \frac{r}{C}) dv' + \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{C})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \frac{\dot{\vec{p}}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \frac{1}{r} \times \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{C}) + \frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{\nabla} \times \dot{\vec{p}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{r} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \times \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{C}) + \frac{\mu_0}{4\pi r} \hat{r} \times \frac{\partial \dot{\vec{p}}}{\partial t}$$

$$= \frac{-\mu_0}{4\pi r^2} \vec{r} \times \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{C}) + \frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{r} \times \left(\frac{1}{C} \ddot{\vec{p}} \right)$$

$$\vec{B} = \frac{-\mu_0}{4\pi C r^2} \vec{r} \times \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{C})$$

$$\vec{B} = \frac{-\mu_0}{4\pi C r^2} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & z \\ -p_0 \omega^2 \cos \omega t & -p_0 \omega^2 \sin \omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-\mu_0}{4\pi C r^2} \left[\hat{x} (z p_0 \omega^2 \sin \omega t) + \hat{y} (-z p_0 \omega^2 \cos \omega t) \right.$$

$$\left. + \hat{z} (-x p_0 \omega^2 \sin \omega t + p_0 \omega^2 y \cos \omega t) \right]$$

$$+ \frac{\partial F_y(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial F_z(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{dF(r)}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{-\mu_0}{4\pi r^2} \vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{C}) + \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{C})}{dr} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left\{ 0 + \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{C})}{r^2} + \frac{\vec{r} \cdot \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{C})}{C r^2} \right\} \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{-\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{C})}{r^2} + \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{C})}{dr}$$

$$\frac{d\dot{\vec{p}}}{dr} = \frac{dt'}{dr} \frac{d\dot{\vec{p}}(t')}{dt'} = -\frac{1}{C} \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{C})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left\{ 0 + \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{C})}{r^2} + \frac{\vec{r} \cdot \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{C})}{C r^2} \right\}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{C^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{-\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{C})}{r^2} - \frac{\mu_0}{4\pi C r} \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{C})$$

$$+ \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{C})}{C r^2} + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{C})}{C r^2} = 0$$

۲۰-۷- توان تابشی از یک آنتن در واحد زاویه فضایی (استرادیان) در جهتی که توان بیشینه است، تقسیم بر $1/(4\pi)$ برابر توان کل تابشی، معیاری است از جهتندی یک آنتن. جهتندی یک دوقطبی الکتریکی نوسان کننده را محاسبه کنید.

حل:

$$d = \frac{(P_\Omega)_{\max}}{1 \times \bar{P}} \quad (\text{جهتندی یک دوقطبی})$$

$$P = \frac{R^2}{\mu_0} \int E_\theta B_\phi r \sin \theta d\theta \Rightarrow P_\Omega = \frac{R^2}{\mu_0} E_\theta B_\phi$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I_0 l}{4\pi r} \sin \theta \left[\frac{\omega}{C} \cos w(t - \frac{r}{C}) \right]$$

$$E_\theta = \frac{l I_0}{4\pi r \epsilon_0 C} \sin \theta \left[\frac{\omega}{C} \cos w(t - \frac{r}{C}) \right]$$

$$P_\Omega = \frac{R^2}{\mu_0} \frac{\mu_0 l^2 I_0^2}{16\pi^2 R^2 \epsilon_0 C} \sin^2 \theta \left(\frac{\omega}{C} \right)^2 \cos^2 w(t - \frac{r}{C})$$

$$= \frac{l^2 I_0^2 \omega^2}{16\pi^2 C^2 \epsilon_0} \sin^2 \theta \cos^2 w(t - \frac{r}{C})$$

$$\bar{P}_\Omega = \frac{l^2 I_0^2 \omega^2}{32\pi^2 C^2 \epsilon_0} \sin^2 \theta, \bar{P} = \frac{l^2 \omega^2 I_0^2}{8\pi \epsilon_0 C^2 r}$$

برای $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $(P_\Omega)_{\max}$ است، بنابراین:

$$\frac{PT}{E_k} = \frac{\frac{e^2 \ddot{r}^2}{4\pi\epsilon_0 C^3} \times T}{\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}} = \frac{e^2 \ddot{r}^2 T \times 2 \times 4\pi\epsilon_0 \times r}{2 \times 4\pi\epsilon_0 C^3 \times e^2} = \frac{r T \ddot{r}^2}{C^3}$$

$$= \frac{r T}{C^3} \left(\frac{V}{r} \right)^2 = \frac{r T}{C^3} \frac{V^2}{r} = \frac{T V^2}{C^3} \left(\frac{V}{C} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{V}{C} \right)^2$$

$$V = r\omega = r \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{V T}{r} = 2\pi \quad \text{در حرکت دایره‌ای}$$

(ب)

$$\frac{V}{C} = \frac{1}{n} \frac{1}{137} \Rightarrow \frac{V}{C} = \frac{1}{2137}$$

$$\frac{PT}{E_k} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{1}{2137} \right)^2 \quad (\text{for } n=2)$$

۲۰-۱۰- الکترونی در یک سینکروترون به شعاع m تا نصف سرعت نور شتاب گرفته است. (الف) توان تابش شده توسط الکترون را محاسبه کنید (جرم سکون $kg = 9.11 \times 10^{-31}$). (ب) چه کسری از انرژی جنبشی آن در هر ثانیه تابش می‌شود.

حل:

$$a = \dot{V} = \frac{V^2}{r} = \frac{\left(\frac{c}{2137} \right)^2}{r} = \frac{\left(\frac{3 \times 10^8}{2137} \right)^2}{r} = 1/125 \times 10^{16} \quad \left(\frac{m}{s^2} \right)$$

(الف)

$$P = \frac{q^2 \ddot{r}^2}{4\pi\epsilon_0 C^3} = \frac{(1/6 \times 10^{-19})^2}{4\pi(8.85 \times 10^{-12})^3} \frac{(1/125 \times 10^{16})^2}{(3 \times 10^8)^2} = 2/2 \times 10^{-12} \left(\frac{J}{s} \right)$$

(ب)

$$k = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} (9.11 \times 10^{-31}) \left(\frac{3 \times 10^8}{2137} \right)^2 = 1.0/25 \times 10^{-15} \text{ J}$$

۲۰-۱۱- مقاومت تابشی دوقطبی مغناطیسی نوسان کننده در مسئله ۲۰-۳ را به دست آورید. نتیجه به دست آمده را بر حسب a و λ بیان کنید تا بتوان آن را با معادله (۲۰-۱۸) مقایسه کرد.

حل:

$$P = \frac{\mu_0}{6\pi} I_0^2 A^2 \frac{\omega^2}{C^3} \cos^2 w(t - \frac{r}{c})$$

و چون میانگین زمانی $\cos^2 w(t - \frac{r}{c})$ برابر $\frac{1}{2}$ است، میانگین زمانی توان تابشی برابر است با:

$$\bar{P} = \frac{\mu_0}{6\pi} A^2 \frac{\omega^2}{C^3} \frac{I_0^2}{2} = R_r \frac{I_0^2}{2} \Rightarrow R_r = \frac{\mu_0}{6\pi} A^2 \frac{\omega^2}{C^3}$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad A = \pi a^2$$

$$\Rightarrow R_r = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (2\pi)^2 \left(\frac{\pi a^2}{\lambda} \right)^2$$

که مقاومت تابشی یک دو قطبی برابر است با:

$$\vec{E} = \frac{-C}{r} \vec{r} \times \vec{B} = \frac{-C}{r} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & z \\ -\frac{\mu_0}{4\pi C r^2} p_0 \omega^2 \sin \omega t & -x p_0 \omega^2 \sin \omega t + p_0 \omega^2 y \cos \omega t & -z p_0 \omega^2 \cos \omega t \left(\frac{-\mu_0}{4\pi C r^2} \right) \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{C}{r} \left[\hat{x} (-x y p_0 \omega^2 \sin \omega t + p_0 \omega^2 y^2 \cos \omega t) - z^2 p_0 \omega^2 \cos \omega t \left(\frac{\mu_0}{4\pi C r^2} \right) + \hat{y} \left(\frac{-\mu_0}{4\pi C r^2} p_0 \omega^2 \sin \omega t \right) \right]$$

$$- (-x^2 p_0 \omega^2 \sin \omega t + p_0 \omega^2 x y \cos \omega t) + \dots$$

$$S = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 C^3 r^5} \vec{r} (\vec{r} \times \vec{p})^2$$

$$= \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 C^3 r^5} \vec{r} (\vec{r} \times \vec{p})^2$$

$$S = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 C^3 r^5} \vec{r} (\vec{r} \times \vec{p})^2$$

۲۰-۹- در مدل کلاسیک اتم هیدروژن، الکترون در مداری دایره‌ای به شعاع r می‌گردد و انرژی جنبشی آن عبارت است از

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(الف) کسر انرژی تابش شده در هر دور گردش، PT/E_k را محاسبه کنید. در اینجا T دوره تناوب مداری است. (ب) مکانیک کوانتومی حکم می‌کند که در تراز n ام

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{n} \frac{1}{137}$$

PT/E_k را به ازای $n=2$ محاسبه کنید.

حل:

$$E_k = \frac{e^2}{24\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{شعاع مدار دایره‌ای})$$

$$\frac{PT}{E_k} = ? \quad (\text{کسر انرژی تابش شده})$$

$$p = e r \Rightarrow \dot{p} = e \dot{r}, \quad \ddot{p} = e \ddot{r}$$

(در جهت محور Z ها)

$$S = \frac{r^2 \ddot{p}^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 C^3 r^5} \vec{r} = \frac{\ddot{p}^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 C^3 r^3} \vec{r}$$

$$p = \oint_{(کره)} s \cdot n \, da = \int \frac{\ddot{p}^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 C^3 r^3} \vec{r} \cdot \vec{r} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{\ddot{p}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 C^3} \int \sin^2 \theta \, d\theta \int \sin^2 \theta \sin \theta \, d\theta$$

$$= \int (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta \, d\theta = \int \sin \theta \, d\theta - \int \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta$$

$$= -\cos \theta \Big|_0^\pi + \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi = -(-1-1) + \frac{1}{3}(-1-1) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$p = \frac{\ddot{p}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 C^3} \frac{4}{3} \Rightarrow p = \frac{2}{3} \frac{e^2 \ddot{r}^2}{4\pi\epsilon_0 C^3}$$

$$\frac{\cos^2 \beta e^2 E_{oy}^2}{m^2} + \frac{e^2}{m^2} E_{ox}^2$$

$$\vec{S} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 C^2 r^2 m^2} [E_{ox}^2 + \cos^2 \beta E_{oy}^2] \hat{r}$$

$$= \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 C^2 r^2 m^2} (1 + \cos^2 \beta) \hat{r}$$

$$S_r = \frac{1}{\mu_0 C} E_o^2 \quad S_o = I_o \quad E_o^2 = \mu_0 C I_o$$

$$F_C = \frac{mV^2}{r} \Rightarrow \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_e} = E_k = \frac{1}{2} mC^2$$

$$R_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mC^2} \quad R_e^2 = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 C^2}$$

$$|S| = (R_e^2 C \epsilon_0) \times \frac{E_o^2}{r^2} (1 + \cos^2 \beta) = R_e^2 C \epsilon_0 \frac{\mu_0 C I_o}{r^2} (1 + \cos^2 \beta)$$

$$= \frac{R_e^2 I_o}{r^2} (1 + \cos^2 \beta)$$

۲۰ - ۱۳ - پرتوهای ایکس با طول موج 2Å در آلومینیم عمدتاً توسط پراکندگی کامپتون تضعیف می‌شوند. ضریب جذب، $\alpha = 2/\delta$ ، را از سطح مقطع مؤثر تامسون محاسبه کنید. در هر متر مکعب تعداد 1.0×10^{28} اتم آلومینیم وجود دارد.

حل:

$$\sigma_T = \frac{r}{N\delta} = \frac{\alpha}{N} \Rightarrow \alpha = N\sigma_T = (ZN_{Al})\sigma_T$$

$$\text{و با استفاده از } \sigma_T = \frac{8\pi}{3} R_e^2 \text{ خواهیم داشت:}$$

$$\alpha = (ZN_{Al}) \frac{8\pi}{3} R_e^2$$

$$\text{و با عدد گذاری } R_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mC^2} = 2.81 \times 10^{-15} \text{ (m)} \text{ و } Z_{Al} = 13 \text{ و } N_{Al} = 6.02 \times 10^{23} \text{ به دست می‌آوریم:}$$

$$\alpha = (ZN_{Al}) \frac{8\pi}{3} R_e^2$$

$$= (13 \times 6.02 \times 10^{23}) \frac{8\pi}{3} \times (2.81 \times 10^{-15})^2 = 52/11 \text{ (m}^{-1}\text{)}$$

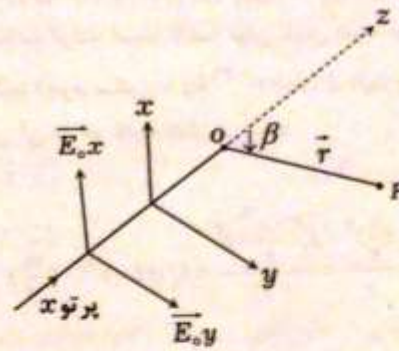
$$R_r = \frac{2\pi}{r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

۲۰ - ۱۲ - باریکه‌ای از پرتوهای ایکس ناقطبیده با شدت I_o بر ماده‌ای حاوی الکترونهای آزاد فرود می‌آید. با در نظر گرفتن تنها یک الکترون و استفاده از عبارتهای بخش ۲۰-۳، نشان دهید که شدت باریکه پراکنده شده عبارت است از

$$I_o = I_o \frac{(1 + \cos^2 \beta) R_e^2}{r^2}$$

که در آن β بین خط OP و جهت باریکه پرتو ایکس اصلی است. نقطه O مکان الکترون است، و P نقطه‌ای است که در آنجا باریکه پراکنده شده مشاهده می‌شود.

حل: پرتو x فرودی در جهت محور z ها است



$$E_o = E_{ox} \hat{x} + E_{oy} \hat{y} \quad (\text{چون ناقطبیده متقارن است})$$

$$|E_{ox}|^2 = |E_{oy}|^2 \Rightarrow E_o^2 = E_{ox}^2 + E_{oy}^2 = 2E_{oy}^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{oy} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_o \\ E_{ox} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_o \end{cases}$$

$$\vec{p} = -e\vec{r} \rightarrow \vec{p} = -e\vec{r} \Rightarrow \vec{p} = -e\vec{r} = -e\vec{V} \quad \left| \begin{array}{l} -e\vec{E} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} \Rightarrow \dot{\vec{v}} = \frac{-e\vec{E}}{m} \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \frac{e^2 \vec{E}}{m} = \frac{e^2}{m} [E_{ox} \hat{x} + E_{oy} \hat{y}]$$

$$\vec{r} = r \sin \beta \hat{y} + r \cos \beta \hat{z}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 C^2 r^2} \vec{r} (\vec{r} \times \vec{p})^2 = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 C^2 r^2} \vec{r} (\hat{r} \times \vec{p})^2$$

$$\hat{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \\ \frac{e^2 E_{ox}}{m} & \frac{e^2 E_{oy}}{m} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{x} \left(\frac{-\cos \beta e^2 E_{oy}}{m} \right) + \hat{y} \left(\frac{\cos \beta e^2 E_{ox}}{m} \right) + \hat{z} \left(\frac{-\sin \beta e^2 E_{ox}}{m} \right)$$

$$(\hat{r} \times \vec{p})^2 = \frac{\cos^2 \beta e^2 E_{oy}^2}{m^2} + \frac{\cos^2 \beta e^2 E_{ox}^2}{m^2} + \frac{\sin^2 \beta e^2 E_{ox}^2}{m^2}$$

الکترو دینامیک

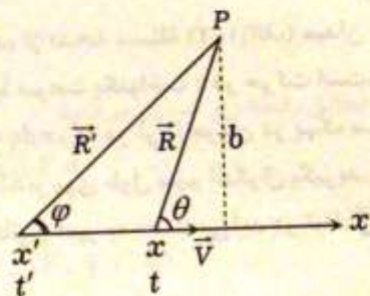
مسائل فصل بیست و یکم

۲۱-۱- (الف) برای باری که با سرعت v در حرکت یکنواخت است، نشان دهید

$$R^* = R \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sin^2 \theta}$$

که در آن برداری از مکان فعلی بار به نقطه میدان است و $R \cdot v = Rv \cos \theta$. (ب) با فرض $v/c \ll 1$ ، نمودار قطبی $|E|$ را به صورت تابعی از θ برای R ثابت رسم کنید.

حل:



(الف)

$$R^* = R' - \frac{\vec{R}' \cdot \vec{V}}{C} \Rightarrow R^* = R' - \frac{R' V \cos \varphi}{C}$$

$$\Rightarrow R^{*2} = R'^2 + R'^2 \frac{V^2}{C^2} \cos^2 \varphi - 2 R' V \frac{V}{C} \cos \varphi$$

$$R' \cos \varphi = \sqrt{R'^2 - b^2}, \quad b = R' \sin \theta$$

بنابراین:

$$R^{*2} = R'^2 + \frac{V^2}{C^2} (R'^2 - b^2) - 2 R' V \frac{V}{C} \cos \varphi$$

$$= R'^2 + \frac{V^2}{C^2} (R'^2 - R'^2 \sin^2 \theta) - 2 R' V \frac{V}{C} \cos \varphi \quad (1)$$

و با توجه به مثلث ABP داریم:

$$R^2 = R'^2 + (x - x')^2 - 2 R' (x - x') \cos \varphi$$

$$x - x' = V(t - t'), \quad R' = C(t - t') \Rightarrow x - x' = \frac{V}{C} R'$$

پتانسیلهای برداری و نردهای برای یک بار نقطه‌ای متحرک سریع از پاسخهای انتگرالی پتانسیلهای تأخیری به دست می‌آیند. نتایج برای نقطه $\vec{P}$ در زمان t عبارت‌اند از:

$$\varphi(\vec{P}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^*} \quad (1-21)$$

$$\vec{A}(\vec{p}, t) = \frac{\vec{V}'}{C^2} \varphi(\vec{p}, t) \quad (2-21)$$

که در آن

$$R^* = R' - \frac{\vec{R}' \cdot \vec{V}'}{C} \quad (3-21)$$

و برداری است از مکان ذره باردار q در زمان تأخیری. $t' = t - \frac{R'}{C}$ به نقطه میدان و $\vec{V}'$ سرعت ذره است در زمان تأخیری با مشتق‌گیری از این پتانسیلها به نحو صحیح. میدانها به دست می‌آیند.

(۴-۲۱)

$$\vec{E}(\vec{p}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^{*2}} \left\{ \left(\vec{R}' - \frac{R' \vec{V}'}{C} \right) \left(1 - \frac{V'^2}{C^2} \right) + \frac{1}{C^2} \vec{R}' \times \left[\left(\vec{R}' - \frac{R' \vec{V}'}{C} \right) \times \vec{V}' \right] \right\}$$

$$\vec{B}(\vec{p}, t) = \vec{R}' \times \frac{\vec{E}(\vec{p}, t)}{R' C}$$

میدان $\vec{E}$ یک بار نقطه‌ای با حرکت یکنواخت ($\dot{V} = 0$) نسبت به صفحه‌ای عمود بر $\vec{V}$ (که از مکان فعلی بار در زمان t می‌گذرد) متقارن است و در جهت عمود بر $\vec{V}$ شدیدتر است تا در جهت امتداد $\vec{V}$. این میدان همواره نسبت به مکان فعلی بار رو به خارج است.

تنها جملات متناسب با شتاب در تابش سهمین‌اند. در میدان تابش بردارهای $\vec{E}$ و $\vec{B}$ بر یکدیگر عمودند. برای $\frac{V'}{C} \ll 1$ ، نتیجه با آنچه در فصل ۲۰ به دست آوردیم یکسان است.

داریم:

$$R^* = R \sqrt{1 - \left(\frac{V}{C}\right)^2 \sin^2 \theta}$$

$$\Rightarrow B = |\vec{B}| = \frac{1}{C^2} \frac{q \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right)}{4\pi\epsilon_0 R^2 \left(1 - \left(\frac{V}{C}\right)^2 \sin^2 \theta\right)^{3/2}} V R \sin \theta$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{V dq \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right) \sin \theta}{R^2 \left(1 - \left(\frac{V}{C}\right)^2 \sin^2 \theta\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right) \sin \theta}{R^2 \left(1 - \left(\frac{V}{C}\right)^2 \sin^2 \theta\right)^{3/2}}$$

و با توجه به شکل داریم:

$$R^2 = x^2 + r^2, \quad \sin \theta = \frac{r}{R}$$

بنابراین:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \theta dx}{R^2 \left(1 - \left(\frac{V}{C}\right)^2 \sin^2 \theta\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r dx}{R^2 \left(1 - \left(\frac{V}{C}\right)^2 \frac{r^2}{R^2}\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r dx}{\left(R^2 - \frac{V^2}{C^2} r^2\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r dx}{\left(x^2 + \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right) r^2\right)^{3/2}}$$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \left(x^2 + a^2\right)^{1/2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \frac{x}{\left(x^2 + \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right) r^2\right)^{1/2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

۲۱-۳- فرض کنید شتاب یک ذره سریع با سرعت آن در جهت یکسانی است. نشان دهید که تابش در امتداد جهت حرکت صفر است.

حل:

$$(۵۶-۲۱): \vec{S} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 C^2} \frac{\vec{R}' (\vec{R}' \times \vec{V}')^2}{R'^5}$$

و با توجه به فرض مسئله:

$$\vec{V}' \parallel \vec{V} \quad (۱)$$

و چون در امتداد جهت حرکت R' با V' موازی خواهد شد، بنابراین:

$$\vec{R}' \parallel \vec{V} \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \vec{V}' \parallel \vec{R}' \Rightarrow \vec{R}' \times \vec{V}' = 0 \Rightarrow \vec{S} = 0$$

$$R'^2 + R'^2 + \left(\frac{V}{C}\right)^2 R'^2 - 2R' \left(\frac{V}{C}\right) R' \cos \varphi$$

$$= R'^2 + \frac{V^2}{C^2} R'^2 - 2R' \frac{V}{C} \cos \varphi \quad (۲)$$

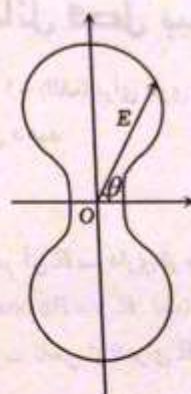
$$(۱), (۲) \Rightarrow R'^2 = R'^2 - \frac{V^2}{C^2} R'^2 \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow R^* = R \sqrt{1 - \left(\frac{V}{C}\right)^2 \sin^2 \theta}$$

(ب)

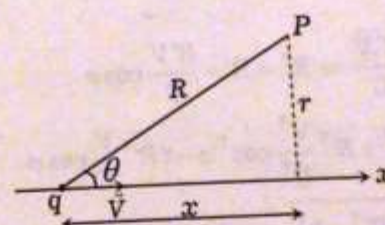
$$(۲۹-۲۱) \text{ معادله: } \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{R^{*2}} \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right)$$

$$\Rightarrow |\vec{E}| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right)}{R^2 \left(1 - \frac{V^2}{C^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}}$$

که در آن $\frac{V}{C} = \beta$ است.

۲۱-۲- با استفاده از نتیجه مسئله ۲۱-۱ (الف) میدان مغناطیسی B را برای بار dq که با سرعت یکنواخت v در حرکت است، پیدا کنید. فرض کنید $vdq = Idx$ که در آن I جریان در یک سیم مستقیم طولی است. و از dB بر روی طول سیم انتگرال بگیرید. توجه کنید که نتیجه با آنچه از قانون آمپر به دست می آید در توافق است حتی برای $v/c \approx 1$.

حل:

میدانهای $\vec{E}$, $\vec{B}$ برای بار متحرک q با سرعت یکنواخت $\vec{V}$ برابر است با:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{R^{*2}} \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right) \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{C^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^{*2}} \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right) \vec{V} \times \vec{R}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{C^2} \vec{V} \times \vec{E}$$

$$\Rightarrow |\vec{B}| = \frac{1}{C^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^{*2}} \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right) V R \sin \theta$$

و با توجه به نتیجه قسمت (الف) مسئله قبل داریم:

نظریه خاص نسبیت

$$\sum_{\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = \mu_0 J_{\mu} \quad \vec{F} = \mu_0 \vec{J} \quad (4-22)$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\lambda}} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_{\nu}} = 0$$

معادله موج برای پتانسیل:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial^2 x_{\mu}}{\partial x_{\nu}^2} = -\mu_0 J_{\mu} \quad \nabla^2 x = -\mu_0 \vec{J} \quad (5-22)$$

شرط لورنتس:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0 \quad \vec{x} = 0 \quad (6-22)$$

معادله پیوستگی:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial J_{\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0 \quad \vec{J} = 0 \quad (7-22)$$

تانسور میدان مطابق رابطه زیر تبدیل می شود

$$F' = A F A^{-1} = A F \tilde{A} \quad (8-22)$$

در سه بعد داریم:

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel} \quad E'_{\perp} = \gamma(E_{\perp} + u \times B) \quad (9-22)$$

$$B'_{\parallel} = B_{\parallel} \quad B'_{\perp} = \gamma(B_{\perp} - \frac{1}{c^2} u \times E)$$

با تبدیل از دستگاه ساکن بار به دستگاه متحرک، میدان یک بار نقطه‌ای با حرکت یکنواخت به آسانی به دست می آید.

این یک نتیجه تجربی است که در هر دستگاه مختصاتی با حرکت یکنواخت، تابش الکترومغناطیسی با سرعت ثابت c در خلأ منتشر می شود. بنابراین در تبدیل به دستگاه مختصاتی که به طور یکنواخت حرکت کند، باید معادله موج بدون تغییر باقی بماند. این کار با تبدیل لورنتس مختصات، که در آن صورت درجه دوم $(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2)$ ناورد می ماند، انجام می شود. این تبدیل برحسب هندسه چهار بعدی مختلط (نا اقلیدسی) فضای مینکوفسکی، که در آن ict بعد چهارم است، به نحو مناسبی بیان می شود. تبدیل لورنتس (همچنین دوران در فضای معمولی) با ماتریس متعامد مختلطی نمایش داده می شود که بر روی یک چاربردار، یا یک جهان بردار، عمل می کند. ماتریس تبدیل لورنتس به دستگاهی که با سرعت u در جهت x حرکت کند، عبارت است از:

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (1-22)$$

که در آن $\beta = \frac{u}{c}$ ، $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (این ماتریس نمایانگر دورانی

است با یک زاویه موهومی). معادلات ماکسول هموردا هستند- یعنی، اگر میدان E و میدان B با تبدیل لورنتس به طور مناسب تبدیل شوند، شکل این معادلات تغییر نخواهد کرد.

چار بردارهای اصلی الکترومغناطیس، تانسور میدان، و روابط بین آنها عبارتند از چاربردارها:

$$x = (x, y, z, ict) \quad \text{زمان - مکان} \quad (2-22)$$

$$\vec{J} = (J_x, J_y, J_z, ic\rho) \quad \text{بار - جریان}$$

$$H = (A_x, A_y, A_z, \frac{i\phi}{c}) \quad \text{پتانسیل}$$

تانسور میدان:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x_{\nu}} \quad \vec{F} = \nabla \times \vec{A} \quad (3-22)$$

معادلات ماکسول:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} = \frac{\partial \xi}{\partial t'} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \eta}{\partial t'} \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} = -(c-u) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + (c+u) \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}$$

با جایگذاری روابط بدست آمده در رابطه (۵) داریم:

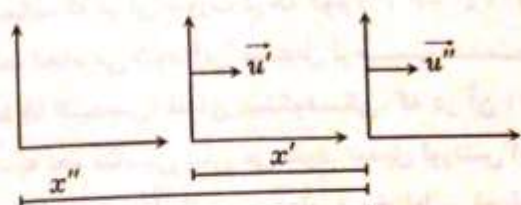
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + 0 + 0 &= \frac{1}{C^2} \left[(c-u)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + (c+u)^2 \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} \right. \\ &\quad \left. + u^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} \right) - 2u(-(c-u) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + (c+u) \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}) \right] \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

بنابراین ϕ جوابی برای معادله موج تبدیل شده است.

۲۲-۲ با انجام دو تبدیل لورنتس پی در پی، ابتدا به دستگاه Σ' که نسبت به دستگاه Σ با سرعت u حرکت می کند و سپس به دستگاه Σ'' که با سرعت u' نسبت به Σ' حرکت می کند، قضیه جمع نسبیتی سرعت ها را ثابت کنید:

$$u'' = \frac{u+u'}{1+uu'/c^2}$$

حل:



$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dx'}{dt'} = u'$$

و با توجه به تبدیلات لورنتس داریم:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \gamma(x - ut) \Rightarrow dx' = \gamma(dx - u dt) \\ t' &= \gamma(t - \frac{u}{C^2}x) \Rightarrow dt' = \gamma(dt - \frac{u}{C^2}dx) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - u dt)}{\gamma(dt - \frac{u}{C^2}dx)}$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - u dt}{dt - \frac{u}{C^2}dx}, \quad \frac{dx'}{dt'} = u'$$

$$\Rightarrow u' = \frac{dx - u dt}{dt - \frac{u}{C^2}dx} = \frac{(\frac{dx}{dt}) - u}{1 - \frac{u}{C^2}(\frac{dx}{dt})}$$

$$\Rightarrow u' = \frac{u'' - u}{1 - \frac{u}{C^2}u''} \Rightarrow u' - \frac{u'u''}{C^2} = u'' - u \Rightarrow u'' = \frac{u' + u}{1 + \frac{uu'}{C^2}}$$

۲۲-۳ نیمه عمر ذاتی یک ذره ناپایدار 1.6×10^{-19} s است. اگر این ذره با سرعتی 0.9999 برابر سرعت نور حرکت کند، نیمه عمر ظاهری آن در دستگاه آزمایشگاه چقدر است؟

مسائل فصل بیست و دوم

۲۲-۱ با استفاده از تبدیل گالیله، معادله (۱-۲۲)، معادله موج را

به دستگاه مختصات پریم تبدیل کنید. نشان دهید که

$$\phi = F\{x - (c-u)t\} + G\{x + (c+u)t\}$$

که در آن F و G توابع دلخواهی از شناسه هایشان هستند. پاسخی برای معادله تبدیل شده است.

حل:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

تبدیلات گالیله:

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial t'} - u \frac{\partial}{\partial x'} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial}{\partial t'} - u \frac{\partial}{\partial x'} \right]^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + u^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2u \frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'} \quad (4)$$

با توجه به روابط بدست آمده، معادله موج در دستگاه پریم دار به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} (1), (2), (3), (4) \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \phi \\ = \frac{1}{C^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + u^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2u \frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'} \right] \phi \quad (5) \end{aligned}$$

تابع ϕ را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\phi = F\{x' - (c-u)t'\} + G\{x' + (c+u)t'\}$$

و با فرض $\xi = x' - (c-u)t'$ و $\eta = x' + (c+u)t'$ داریم:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x'} + \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x'} = \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y'} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t'} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t'} + \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t'} = -(c-u) \frac{\partial F}{\partial \xi} + (c+u) \frac{\partial G}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} = (c-u)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + (c+u)^2 \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}$$

عمود بر B انتخاب کنید و اندازه $u/(1+\beta^2)$ را بر حسب E^2 ، B^2 و $\vec{E} \times \vec{B}$ تعیین کنید.

حل: در واقع می‌خواهیم $\vec{u}$ به گونه‌ای باشد که $\vec{E}'$ با $\vec{B}'$ موازی باشد، یعنی:

$$\vec{E}' \times \vec{B}' = 0 \quad (1)$$

بنابراین، بردار $\vec{u}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم و از رابطه (۱)، ضریب ثابت α را بدست می‌آوریم.

$$\vec{u} = \alpha \vec{E} \times \vec{B} \quad (2)$$

$$(\vec{E}' \times \vec{B}') = 0, \vec{B}'_{11} = \vec{B}_{11} = 0, \vec{B}'_{22} = \vec{B}_{22} = 0$$

بنابراین:

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}), \vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{u} \times \vec{E}) \quad (3)$$

$$(1), (3) \Rightarrow \vec{E}' \times \vec{B}' = 0 \Rightarrow (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \times (\vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{u} \times \vec{E}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{E} \times (\vec{u} \times \vec{E}) + (\vec{u} \times \vec{B})$$

$$\times \vec{B} - \frac{1}{c^2} (\vec{u} \times \vec{B}) \times (\vec{u} \times \vec{E}) = 0 \quad (4)$$

$$\vec{E} \times (\vec{u} \times \vec{E}) = \vec{u}(\vec{E} \cdot \vec{E}) - \vec{E}(\vec{E} \cdot \vec{u}) = \vec{u} E^2 - \vec{E} \vec{u} \cdot \vec{E} = E^2 \vec{u} \quad (5)$$

$$(\vec{u} \times \vec{B}) \times \vec{B} = -\vec{B} \times (\vec{u} \times \vec{B}) = -B^2 \vec{u} \quad (6)$$

$$(\vec{u} \times \vec{B}) \times (\vec{u} \times \vec{E}) = \vec{u}[(\vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{E}] - [(\vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{u}] \vec{E} = \vec{u}[(\vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{E}] - 0 \quad (7)$$

با جایگذاری روابط (۵)، (۶)، (۷) در رابطه (۴) داریم:

$$\vec{E} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} E^2 \vec{u} - B^2 \vec{u} - \frac{1}{c^2} \vec{u}[(\vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{E}] \vec{E} \times \vec{B} - \alpha \left(\frac{E^2}{c^2} + B^2 \right) (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{c^2} (\alpha \vec{E} \times \vec{B}) [(\alpha \vec{E} \times \vec{B}) \times \vec{B}] \cdot \vec{E}$$

$$= \vec{E} \times \vec{B} - \alpha \left(\frac{E^2}{c^2} + B^2 \right) (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{\alpha^2}{c^2} [(\vec{E} \times \vec{B}) \times \vec{B}] \cdot \vec{E} (\vec{E} \times \vec{B}) = 0$$

$$1 - \alpha \left(\frac{E^2}{c^2} + B^2 \right) - \frac{\alpha^2}{c^2} [\vec{E} \cdot ((\vec{E} \times \vec{B}) \times \vec{B})] = 0$$

و چون:

$$(2) \Rightarrow \vec{u} = \alpha \vec{E} \times \vec{B}, (\vec{E} \times \vec{B}) = \alpha^2 [\vec{E} \cdot (\vec{B} \times (\vec{E} \times \vec{B}))]$$

بنابراین:

$$1 - \alpha \left(\frac{E^2}{c^2} + B^2 \right) + \frac{u^2}{c^2} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1 + \frac{u^2}{c^2}}{\frac{E^2}{c^2} + B^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{u}}{1 + \frac{u^2}{c^2}} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\frac{E^2}{c^2} + B^2}$$

۲۲ - ۶ - معادله (۲-۳۰) میدان الکتریکی یک سیم طویل مستقیم

حاوی λ واحد بار در واحد طول را به دست می‌دهد. (الف) با یک

تبدیل لورنتس به دستگاهی که با سرعت u در امتداد موازی سیم

حل:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1)$$

$\Delta t'$ ، نیمه عمر ذره از نظر ناظری که با سرعت $V = 0.9999C$ حرکت می‌کند است.

$$\Delta t' = 6 \times 10^{-19} (S) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \Delta t = \frac{6 \times 10^{-19} (S)}{\sqrt{1-(0.9999)^2}} = 4/24 \times 10^{-17} (s)$$

Δt ، نیمه عمر ذره از نظر آزمایشگاه است.

۲۲ - ۴ - نشان دهید که معادله نیروی لورنتس را می‌توان به صورت هموردای زیر نوشت:

$$f_\mu = \sum_\nu F_{\mu\nu} J_\nu$$

حل:

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} = (ic\rho) \left(\frac{-i\vec{E}}{C} \right) + \vec{J} \times \vec{B} = J_\varphi \left(\frac{-i\vec{E}}{C} \right) + \vec{J} \times \vec{B}$$

برای میدان $\vec{B}$ ، $\vec{E}$ داریم:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \frac{-i\vec{E}}{C} = -\vec{\nabla} \left(\frac{-i\phi}{C} \right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial (ict)} = \vec{\nabla} A_\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_\varphi}$$

$$\frac{-iE_1}{C} = \frac{\partial A_\varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_\varphi} = F_{1\varphi} = -F_{\varphi 1}$$

$$\frac{-iE_2}{C} = \frac{\partial A_\varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_\varphi} = F_{2\varphi} = -F_{\varphi 2} \quad (2)$$

$$\frac{-iE_3}{C} = \frac{\partial A_\varphi}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_\varphi} = F_{3\varphi} = -F_{\varphi 3}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = F_{32} = -F_{23}$$

$$B_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} = F_{31} = -F_{13} \quad (3)$$

$$B_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = F_{12} = -F_{21}$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \begin{cases} f_1 = J_\varphi \left(\frac{-i}{C} E_1 \right) + J_2 B_3 - J_3 B_2 \\ = J_\varphi F_{1\varphi} + J_2 F_{13} + J_3 F_{12} \\ f_2 = J_\varphi \left(\frac{-i}{C} E_2 \right) + J_3 B_1 - J_1 B_3 \\ = J_\varphi F_{2\varphi} + J_3 F_{21} + J_1 F_{23} \\ f_3 = J_\varphi \left(\frac{-i}{C} E_3 \right) + J_1 B_2 - J_2 B_1 \\ = J_\varphi F_{3\varphi} + J_1 F_{32} + J_2 F_{31} \end{cases}$$

با توجه به اینکه $F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{\varphi\varphi} = 0$ این معادلات را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f_\mu = \sum_\nu F_{\mu\nu} J_\nu$$

۲۲ - ۵ - میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یکنواخت E و B داده

شده‌اند. یک تبدیل لورنتس پیدا کنید که E و B را با یکدیگر موازی

کند. [راهنمایی: سرعت u ی دستگاه $\sum$ را در جهت عمود بر E و

$$= E_{||}^2 + \gamma^2 E_{\perp}^2 (1 - \frac{u^2}{c^2}) - C^2 B_{||}^2 + \gamma^2 B_{\perp}^2 (u^2 - C^2) \quad (1)$$

$$\gamma^2 (1 - \frac{u^2}{c^2}) = 1 \Rightarrow \gamma^2 (C^2 - u^2) = C^2 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow E'^2 - C^2 B'^2 = E_{||}^2 + E_{\perp}^2 - C^2 (B_{||}^2 + B_{\perp}^2) \\ = E^2 - C^2 B^2$$

۲۲ - ۸ - (الف) بردار پوینینگ را برای بار نقطه‌ای با حرکت یکنواخت بخش ۲۲-۷ تعیین کنید. (ب) نشان دهید که توان کل تابش شده صفر است.

حل:

$$(الف) ۲۲-۴۶: \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R^*)^2} (1 - \beta^2) \quad (1)$$

$$\vec{R} = \{x - ut, y, z\}, \vec{u} = u\hat{i}, \gamma \vec{R} = \{\gamma(x - ut), \gamma y, \gamma z\} \quad (2)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \vec{B} = \frac{1}{C^2} \vec{u} \times \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{1}{\mu_0 C^2} \vec{E} \times (\vec{u} \times \vec{E}) = \epsilon_0 [\vec{u} E^2 - \vec{E} (\vec{u} \cdot \vec{E})]$$

$$= \epsilon_0 u [E^2 \hat{i} - E_x \vec{E}] \quad *$$

$$(1), (2) \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma^2 [(x - ut)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}]}{[\gamma^2 (x - ut)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{\gamma^2}\right) \quad (3)$$

در دستگاه مختصات پریم‌دار (دستگاه مختصات کروی) داریم:

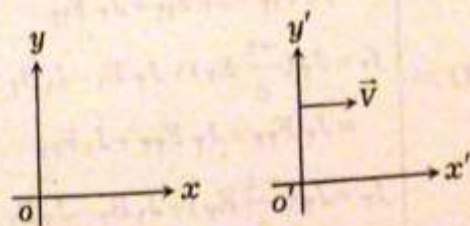
$$\left. \begin{aligned} x - ut &= R \cos \theta \\ y &= R \sin \theta \cos \phi \\ z &= R \sin \theta \sin \phi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{E} \times \frac{1}{R^2} \Rightarrow \vec{S} \times \frac{1}{R^2} \Rightarrow p = \oint \vec{s} \cdot \hat{n} da \rightarrow 0 \quad R \rightarrow \infty$$

۲۲ - ۹ - یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی نقطه‌ای m ، در حال سکون پتانسیل برداری A را به وجود می‌آورد که

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \times \vec{r}}{r^3}$$

اگر m با سرعت ثابت $v \ll c$ در حال حرکت باشد، نشان دهید که یک پتانسیل نرده‌ای وجود خواهد داشت که ظاهراً از یک گشتاور دوقطبی الکتریکی $p = (v \times m)/c^2$ ناشی می‌شود.

حل:



اگر دوقطبی مغناطیسی با سرعت V حرکت کند، پتانسیل برداری در دستگاه پریم‌دار به صورت زیر است:

$$A' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}, \quad \phi' = 0 \quad (1)$$

با استفاده از تبدیل معکوس لورنتس برای چاربردار داریم:

$$u = (A'x, A'y, A'z, \frac{i\phi'}{c})$$

$$u_1 = \gamma u'_1 - i\beta \gamma u'_4 \Rightarrow A_x = \gamma A'_x - 0$$

$$u_2 = u'_2 \Rightarrow A_y = A'_y$$

حرکت می‌کند پروید. (ب) میدان B را در دستگاه جدید محاسبه کنید و آن را با میدان B یک سیم حامل جریان، معادله (۸-۳۵)، مقایسه کنید. (ج) آیا میدان E در دستگاه متحرک وجود دارد؟ (د) بین یک سیم باردار که در جهت طولش حرکت می‌کند و یک سیم حامل جریان چه اختلاف فیزیکی وجود دارد؟

حل: در دستگاهی که سیم در آن ساکن است، داریم:

$$\vec{B} = 0, \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

و مطابق رابطه (۲۲-۴۰)، در دستگاه متحرک داریم:

$$\vec{E}'_{||} = \vec{E}_{||} = 0, \vec{E}'_{\perp} = \gamma [\vec{E}_{\perp} + \vec{u} \times \vec{B}] = \gamma \vec{E}_{\perp}$$

$$\vec{B}'_{||} = \vec{B}_{||} = 0, \vec{B}'_{\perp} = \gamma \left[\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{C^2} \vec{u} \times \vec{E} \right] = \frac{-\gamma}{C^2} \vec{u} \times \vec{E}$$

بنابراین:

$$\vec{E}' = \gamma \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \right) \hat{r}, \vec{B}' = -\gamma \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 C^2 r} \vec{u} \times \hat{r}$$

با در نظر گرفتن دستگاه مختصات استوانه‌ای خواهیم داشت:

$$\vec{E}' = \gamma \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \right) \hat{r}, \vec{B}' = -\gamma \frac{\lambda u}{2\pi\epsilon_0 C^2 r} \hat{\phi}$$

بنابراین، یک سیم باردار که در جهت طولش حرکت می‌کند دارای هر دو میدان $\vec{E}$ ، $\vec{B}$ است.

۲۲ - ۷ - (الف) نشان دهید که ضریب نرده‌ای E ، B در اثر تبدیل لورنتس تغییر نمی‌کند. (ب) همسین مطلب را در مورد $E^2 - C^2 B^2$ نشان دهید.

حل: الف)

$$\vec{E}' \cdot \vec{B}' = (\vec{E}'_{||} + \vec{E}'_{\perp}) \cdot (\vec{B}'_{||} + \vec{B}'_{\perp}) = \vec{E}'_{||} \cdot \vec{B}'_{||} + \vec{E}'_{\perp} \cdot \vec{B}'_{\perp}$$

$$+ \vec{E}'_{||} \cdot \vec{B}'_{\perp} + \vec{E}'_{\perp} \cdot \vec{B}'_{||} = \vec{E}'_{||} \cdot \vec{B}'_{||} + \vec{E}'_{\perp} \cdot \vec{B}'_{||}$$

$$\vec{E}'_{||} = \gamma [\vec{E}_{||} + \vec{u} \times \vec{B}] \quad , \quad \vec{B}'_{||} = \gamma \left[\vec{B}_{||} - \frac{1}{C^2} \vec{u} \times \vec{E} \right]$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \vec{E}_{\perp} \quad , \quad \vec{B}'_{\perp} = \vec{B}_{\perp}$$

$$\vec{E}' \cdot \vec{B}' = \gamma^2 [\vec{E}_{||} + \vec{u} \times \vec{B}] \cdot \left[\vec{B}_{||} - \frac{1}{C^2} \vec{u} \times \vec{E} \right] + 0 + 0 + \vec{E}_{\perp} \cdot \vec{B}_{\perp}$$

$$= \gamma^2 \left[\vec{E}_{||} \cdot \vec{B}_{||} - 0 + 0 - \frac{1}{C^2} (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot (\vec{u} \times \vec{E}) \right] + \vec{E}_{\perp} \cdot \vec{B}_{\perp}$$

$$= \gamma^2 \left[\vec{E}_{||} \cdot \vec{B}_{||} - \frac{u^2}{C^2} \vec{B}_{\perp} \cdot \vec{E}_{\perp} \right] + \vec{E}_{\perp} \cdot \vec{B}_{\perp} = \gamma^2 \left[1 - \frac{u^2}{C^2} \right] \vec{E}_{\perp} \cdot \vec{B}_{\perp}$$

$$+ \vec{E}_{\perp} \cdot \vec{B}_{\perp} = \vec{E}_{\perp} \cdot \vec{B}_{\perp} + \vec{E}_{\perp} \cdot \vec{B}_{\perp} = \vec{E} \cdot \vec{B} \Rightarrow \vec{E}' \cdot \vec{B}' = \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (ب)$$

$$E'^2 - C^2 B'^2 = E_{||}^2 + E_{\perp}^2 - C^2 (B_{||}^2 + B_{\perp}^2)$$

$$= E_{||}^2 + E_{\perp}^2 - C^2 (B_{||}^2 + B_{\perp}^2)$$

$$= E_{||}^2 + \gamma^2 [\vec{E}_{\perp} + \vec{u} \times \vec{B}]^2 - C^2 (B_{||}^2 + \gamma^2 (\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{C^2} \vec{u} \times \vec{E})^2)$$

$$= E_{||}^2 + \gamma^2 E_{\perp}^2 + \gamma^2 u^2 B_{\perp}^2 + 2\vec{E}_{\perp} \cdot (\vec{u} \times \vec{B})$$

$$- C^2 B_{||}^2 - C^2 \gamma^2 B_{\perp}^2 - \frac{1}{C^2} \gamma^2 u^2 E_{\perp}^2 + 2\vec{B}_{\perp} \cdot (\vec{u} \times \vec{E})$$

$$u_r = u \Rightarrow A_z = A'_z$$

$$u_r = i\beta\gamma u'_1 + \gamma u'_r \Rightarrow \frac{i\varphi}{C} = i\beta\gamma A'_x + 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{i\varphi}{C} = i\beta\gamma \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\vec{m} \times \vec{r}')_x}{r'^3}$$

با توجه به اینکه: $V \ll C \Leftrightarrow \gamma \approx 1$ است، بنابراین:

$$\frac{i\varphi}{C} = i\left(\frac{V}{C}\right) \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\vec{m} \times \vec{r}')_x}{r'^3} \Rightarrow \varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{V(\vec{m} \times \vec{r}')_x}{r'^3}$$

$$\vec{V} = V\hat{i}, \quad \mu_0 = \frac{1}{C^2 \epsilon_0} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\frac{\vec{V}}{C^2} \cdot (\vec{m} \times \vec{r}')}{r'^3}$$

$$R = \gamma r' \approx r' \Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\frac{(\vec{V} \times \vec{m}) \cdot \vec{r}}{c^2}}{r'^3} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\frac{(\vec{V} \times \vec{m}) \cdot \vec{R}}{c^2}}{R^3}$$

از مقایسه این رابطه با پتانسیل ناشی از دو قطبی الکتریکی داریم:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} \Rightarrow \vec{P} = \frac{\vec{V} \times \vec{m}}{C^2}$$